

Barem clasa a XI-a

(OLM 2017-etapa locală)

Subiectul I. (7 puncte)

a) Vom utiliza teorema lui Weierstrass.

Termenul general este $x_n = \left(1 + \ln \frac{n+1}{n}\right) \left(1 + \ln \frac{n+2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \ln \frac{2n}{2n-1}\right)$. (1 punct)

Din $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \ln \frac{2n+1}{2n}\right) \left(1 + \ln \frac{2n+2}{2n+1}\right)}{\left(1 + \ln \frac{n+1}{n}\right)} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. $\Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător. (1)

 (1 punct)

$$\left(1 + \ln \frac{2n}{2n-1}\right)^n \leq x_n \leq \left(1 + \ln \frac{n+1}{n}\right)^n.$$
 (1 punct)

Din $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \ln \frac{2n}{2n-1}\right)^n = \sqrt{e}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \ln \frac{n+1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \sqrt{e} < x_n < e, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (2)

Din (1) și (2) conform teoremei lui Weierstrass șirul este convergent. (2 puncte)

b) Șirul $y_n = \ln \frac{n+1}{n} \cdot \ln \frac{n+2}{n+1} \cdot \dots \cdot \ln \frac{2n}{2n-1}$ converge spre zero. (1 punct)

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + y_n)^{2017} - 1}{y_n} = 2017$. (1 punct)

Subiectul II. (7 puncte)

$$\text{Fie } a_n = \frac{e^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}}{n} = \frac{x_n}{y_n}$$

Folosind Stolz-Cesaro avem: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) =$ (1 punct)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}} - e^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} \left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1 \right) =$$
 (3 puncte)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{e^{\ln n}}{n+1} \cdot e^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n} = \ln e \cdot e^\gamma \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = e^\gamma$$
 (3 puncte)

unde γ este constanta lui Euler.

Subiectul III. (7 puncte)

a) Considerăm funcția polinomială $f(x) = \det(A + x \cdot B) = x^2 \cdot \det(B) + t \cdot x + 7$, $f \in \mathbf{Q}(X)$. (1 punct)

Avem $f(\sqrt{7}) = 0 \Leftrightarrow 7 \cdot \det(B) + t \cdot \sqrt{7} + 7 = 0$ și de aici rezultă că $t = 0$, $\det(B) = -1$.

Am obținut astfel $f(x) = -x^2 + 7$.

(1 punct)

Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, rezultă că $x^2 + x + 1 = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Din relațiile lui Viete avem că $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 \cdot x_2 = 1$.

Deoarece $A \cdot B = B \cdot A$ rezultă $A^2 + A \cdot B + B^2 = (A - x_1 \cdot B) \cdot (A - x_2 \cdot B)$

$$\det(A^2 + B^2 + A \cdot B) = f(-x_1) \cdot f(-x_2) = (-x_1^2 + 7) \cdot (-x_2^2 + 7) = x_1^2 \cdot x_2^2 - 7 \cdot (x_1^2 + x_2^2) + 49 = 57. \quad (2 \text{ puncte})$$

b) Considerăm funcția polinomială $f(x) = \det(A^3 + B^3 + C^3 + xABC)$,

care este funcție de gradul al doilea cu coeficientul lui x^2 egal cu $\det(ABC) > 0$ și termenul liber egal

cu $f(0) = \det(A^3 + B^3 + C^3) < 0$.

(1 punct)

Cum matricele comută între ele, putem scrie

$$f(-3) = \det(A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC) = \det(A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) =$$

$$\det(A + B + C) \cdot \det(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) = 0.$$

(1 punct)

Prin urmare funcția de gradul al doilea admite un minim și cum $f(-3) = 0$, $f(0) < 0$, rezultă că

$$f(-4) > 0, \text{ adică } \det(A^3 + B^3 + C^3 - 4ABC) > 0$$

(1 punct)

Subiectul IV. (7 puncte)

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$$

(1 punct)

$$\arcsin \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} - \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} \right)$$

(2 puncte)

$$= \arcsin \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2k-1}} - \arcsin \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{2k+1}}$$

(2 puncte)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arcsin \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\arcsin \sqrt{\frac{k}{2k-1}} - \arcsin \sqrt{\frac{k+1}{2k+1}} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arcsin 1 - \arcsin \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

(2 puncte)